

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЙ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И СИГНАЛОВ

УДК 621.391: 621 39

ДИСПЕРСИЯ ОЧЕРЕДЕЙ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПУАССОНОВСКИМИ ПОТОКАМИ

Лихтциндер Б.Я.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

E-mail: b.lihtcinder@psuti.ru

Рассматриваются групповые пуассоновские потоки в системах массового обслуживания. Групповые пуассоновские модели потоков позволяют получить весьма простые зависимости средних размеров очередей от коэффициента загрузки однолинейной системы массового обслуживания. Показано, что дисперсия чисел заявок в таких потоках линейно зависит от загрузки и определяет средние значения размеров очередей. Поскольку в групповом пуассоновском потоке пачки заявок независимы, в формулах для средних значений очередей отсутствуют элементы, определяемые корреляционными связями. Получены соотношения, определяющие второй начальный момент и дисперсию размеров очередей в системах массового обслуживания с групповыми пуассоновскими потоками. Значения второго начального момента размера очередей получены возведением уравнения баланса в третью степень. Показано, что дисперсия размеров очередей зависит от третьего центрального момента чисел поступающих заявок. Третий центральный момент характеризует степень асимметричности распределения размеров пачек заявок.

Ключевые слова: групповые пуассоновские потоки, системы массового обслуживания, дисперсии, коэффициент загрузки, очереди

Введение

Пакетная передача в современных телекоммуникационных сетях показала, что модели трафика, основанные на распределении Пуассона, не являются адекватными. Пачечный характер пакетного трафика, взаимная зависимость пакетов приводят к существенному влиянию корреляционной составляющей на размеры очередей. Существует множество моделей трафика, учитывающих его корреляционные свойства. Многие из указанных моделей учитывают корреляционные свойства потоков, но они оказались слишком сложными и не привели к существенным результатам.

Модели «самоподобного» трафика, учитывающие корреляционные свойства, оказались слишком сложными, неэффективными. На смену им пришел целый класс моделей потоков с коммутируемой цепью Маркова – ВМАР-потоки [1–3; 6–13]. Среди указанных потоков можно выделить групповые пуассоновские потоки [5]. Это неординарные потоки событий, каждое из которых соответствует одновременному появлению нескольких заявок. События возникают независимо друг от друга и имеют экспоненциальное распределение интервалов между соседними событиями. Следовательно, поток событий является пуассоновским.

Обозначим через τ некоторый интервал времени обработки заявки в системе массового обслуживания (СМО). Среднее значение числа заявок

рассматриваемого потока, так же как и дисперсия $D_m(\rho)$ пропорционально загрузке ρ :

$$\overline{m(\tau)} = \lambda \tau = \rho.$$

$$D_m(\rho) = \lambda \tau \bar{k}^2 = \rho \bar{k}(1 + v_k^2) = E_m \rho.$$

Здесь, $v_k^2 = \frac{D_k}{(\bar{k})^2}$ – квадрат коэффициента вариации, а $\bar{k}$ – среднее число заявок в «пачке».

Интервальный метод [4], основанный на анализе чисел заявок, поступающих в течение одного интервала обработки заявки, обеспечивает установление зависимости среднего размера очереди от коэффициента загрузки системы массового обслуживания.

В групповом пуассоновском потоке пачки заявок независимы, поэтому в формуле для средних значений очередей [4] нет элемента, определяемого корреляционными связями, и формула упрощается.

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{E_m \rho}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \quad (1)$$

В частном случае ординарного пуассоновского потока: $k_i = 1$, $\bar{k} = 1$, $v_k^2 = 0$, $E = 1$ – при этом справедлива известная формула:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

Если два совершенно различных потока имеют одинаковые значения дисперсии, то при одинаковых загрузках средние размеры очередей для таких потоков будут полностью совпадать.

Для таких потоков отличаться будут лишь значения дисперсий $D_q(\rho)$ размеров очередей.

Второй начальный момент

Второй начальный момент размера очереди $q^2(\rho)$ определим из соотношения баланса [4].

$$\begin{aligned} q_i(\rho) &= q_{i-1}(\rho) + m_i(\rho) - \delta_i(\rho); \\ \delta_i(\rho) &= 0, \text{ если } q_{i-1}(\rho) = m_i(\rho) = 0; \\ \delta_i(\rho) &= 1, \text{ в противном случае.} \end{aligned} \quad (2)$$

где $q_i(\rho)$ – значение очереди, $m_i(\rho)$ – число поступивших заявок, а $\delta_i(\rho)$ – обработанных число заявок, в течение интервала времени τ .

Ограничения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_i^k(\rho) &= \delta_i(\rho), \quad m_i(\rho)\delta_i(\rho) = m_i(\rho), \\ q_{i-1}(\rho)\delta_i(\rho) &= q_{i-1}(\rho), \quad \overline{\delta_i(\rho)} = \overline{m_i(\rho)}. \end{aligned} \quad (3)$$

При возведении в третью степень уравнения (2), коэффициент загрузки для ρ краткости будем опускать:

$$q_i^3 = q_{i-1}^3 + 3q_{i-1}^2(m_i - \delta_i) + 3q_{i-1}(m_i - \delta_i)^2 + (m_i - \delta_i)^3.$$

После соответствующих преобразований, с учетом принятых ограничений получим:

$$q_i^3 = q_{i-1}^3 + 3q_{i-1}^2 m_i - 3q_{i-1}^2 + 3q_{i-1}(m_i^2 - 2m_i + 1) + (m_i^3 - 3m_i^2 + 3m_i - \delta_i).$$

Произведем усреднение обеих частей:

$$3\overline{q_{i-1}^2} (1 - \overline{m_i}) = 3\overline{q_{i-1}} (\overline{m_i^2} - 2\overline{m_i} + 1) + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}).$$

$$3\overline{q_{i-1}^2} (1 - \overline{m_i}) = 3\overline{q_{i-1}} (\overline{D_m} + \overline{m_i} - 2\overline{m_i} + 1) + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}).$$

$$3\overline{q_{i-1}^2} (1 - \overline{m_i}) = 3\overline{q_{i-1}} \overline{D_m} + 3\overline{q_{i-1}} (\overline{m_i} - 1)^2 + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}).$$

Определим значение $\overline{q_{i-1}^2}$:

$$\overline{q_{i-1}^2} = \frac{\overline{q_{i-1}} \overline{D_m}}{(1 - \overline{m_i})} + \overline{q_{i-1}} (1 - \overline{m_i}) + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \overline{q_{i-1}} \left[\frac{\overline{D_m}}{(1 - \overline{m_i})} + (1 - \overline{m_i}) \right] + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \overline{q_{i-1}} \frac{\overline{D_m} + (1 - \overline{m_i})^2}{(1 - \overline{m_i})} + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \frac{\overline{q_{i-1}}}{(1 - \overline{m_i})} [\overline{D_m} + (1 - \overline{m_i})^2] + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

Выразим третий начальный момент $\overline{m_i^3}$ через третий центральный момент $\mu_3 = (\overline{m_i} - m_i)^3$.

$$\overline{m_i^3} = (\overline{m_i} - m_i)^3 + 3\overline{m_i} \overline{D_m} + \overline{m_i}^3 = \mu_3 + 3\overline{m_i} \overline{D_m} + \overline{m_i}^3.$$

После подстановки получим:

$$\overline{q_{i-1}^2} = \overline{q_{i-1}} \left[\frac{\overline{D_m} + (1 - \overline{m_i})^2}{(1 - \overline{m_i})} \right] + \frac{3\overline{m_i} \overline{D_m} + \overline{m_i}^3 - 3\overline{D_m} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} + \frac{\mu_3}{3(1 - \overline{m_i})},$$

$$\begin{aligned} \overline{q_{i-1}^2} &= \frac{\overline{q_{i-1}}}{(1 - \overline{m_i})} [\overline{D_m} + (1 - \overline{m_i})^2] + \\ &+ \frac{\overline{m_i}^3 + 3\overline{m_i} \overline{D_m} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} + \frac{\mu_3}{3(1 - \overline{m_i})}. \end{aligned}$$

Подставляя $\overline{q_{i-1}} = \overline{q(\rho)}$ из (1) и учитывая, что $\overline{m(\rho)} = \lambda \tau = \rho$, получим:

$$\begin{aligned} \overline{q^2(\rho)} &= \frac{\overline{D_m(\rho)} - \rho(1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2} [\overline{D_m(\rho)} + (1 - \rho)^2] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3\rho \overline{D_m(\rho)} - 3\overline{D_m(\rho)} - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

Приведенное ниже соотношение позволяет определить второй начальный момент размера очереди в СМО с групповыми пуассоновскими потоками.

Для групповых потоков второй момент размера очереди определится соотношением:

$$\begin{aligned} \overline{q^2(\rho)} &= \frac{E_m \rho - \rho + \rho^2}{2(1 - \rho)^2} [E_m \rho + 1 - 2\rho + \rho^2] + \\ &+ \frac{\rho^3 + 3E_m \rho^2 - 3E_m \rho - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

Для простейшего потока $E_m = 1$, $\mu_3(\rho) = \rho$ выражение упростится:

$$\overline{q^2(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)^2} (1 - \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{3}\rho^2).$$

Мы убеждаемся, что в этом случае второй момент зависит только от коэффициента загрузки.

Дисперсия очередей

Дисперсию размеров очередей определим на основании соотношения:

$$\overline{D_q(\rho)} = \overline{q^2(\rho)} - \overline{q(\rho)}^2.$$

Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
\overline{D_q(\rho)} &= \frac{D_m(\rho) - \rho(1-\rho)}{2(1-\rho)^2} [D_m(\rho) + (1-\rho)^2] + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1-\rho)} \frac{\mu_3(\rho)}{3(1-\rho)} - \\
&\quad - \frac{[D_m(\rho) - \rho(1-\rho)]^2}{4(1-\rho)^2} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1-\rho)}{2(1-\rho)^2} [D_m(\rho) + (1-\rho)^2 - \frac{D_m(\rho) - \rho(1-\rho)}{2}] + \\
&\quad + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1-\rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1-\rho)} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1-\rho)}{4(1-\rho)^2} [2D_m(\rho) + 2(1-\rho)^2 - D_m(\rho) + \rho(1-\rho)] + \\
&\quad + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1-\rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1-\rho)} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1-\rho)}{4(1-\rho)^2} [D_m(\rho) + 2 - 4\rho + 2\rho^2 + \rho - \rho^2] + \\
&\quad + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1-\rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1-\rho)} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1-\rho)}{4(1-\rho)^2} [D_m(\rho) + 2 - 3\rho + \rho^2] + \\
&\quad + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1-\rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1-\rho)}.
\end{aligned}$$

Для простейшего пуассоновского потока $E_m = 1$, $D_m(\rho) = \mu_3(\rho) = \rho$,

$$\overline{D_q(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)^2} (1 - \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{6}\rho^2).$$

Выражение существенно упрощается.

Заключение

Дисперсия очередей пуассоновского потока зависит только от коэффициента загрузки СМО, а дисперсию группового пуассоновского потока определяет третий центральный момент закона распределения размеров пачек заявок. Третий центральный момент зависит от симметричности закона распределения.

Литература

1. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3–59.
2. Neuts M.F. A Versatile Markovian point process // Journal of Applied Probability. 1979. Vol. 16, no. 4. P. 764–779. DOI: 10.2307/3213143
3. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Минск: БГУ, 2000. 175 с.
4. Лихтциндер Б.Я. Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 290 с.
5. Лихтциндер Б.Я., Моисеев В.И. Групповые пуассоновские и гиперпуассоновские модели пакетного трафика // I-Methods. 2022. Т. 14, № 3. С. 2–11.
6. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis // Advances in Applied Probability. 1980. Vol. 12, no. 1. P. 222–261. DOI: 10.2307/1426503
7. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. Introduction to queueing systems with telecommunication applications. Springer Science and Business Media, 2013. 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-5317-8
8. Flexible dual-connectivity spectrum aggregation for decoupled uplink and downlink access in 5G heterogeneous systems / M.A. Lema [et al.] // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2016. Vol. 34, no. 1. P. 2851–2865. DOI: 10.1109/JSAC.2016.2615185
9. A multiband OFDMA heterogeneous network for millimeter wave 5G wireless applications / S. Niknam [et al.] // IEEE Access. 2016. Vol. 4. P. 5640–5648. DOI: 10.1109/ACCESS.2016.2604364
10. Vishnevsky V., Larionov A., Frolov S. Design and scheduling in 5G stationary and mobile communication systems based on wireless millimeter-wave mesh networks // Distributed Computer and Communication Networks. 2014. Vol. 279. P. 11–27. DOI: 10.1007/978-3-319-05209-0_2
11. Applying graph-theoretic approach for time-frequency resource allocation in 5G mm wave backhaul network / V.M. Vishnevsky [et al.] // Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO). 2016. P. 221–224. DOI: 10.1109/RTUWO.2016.7821888

12. On the self-similar nature of Ethernet traffic / W.E. Leland [et al.] // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2, no. 1. P. 1–15.
13. Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса // Радиотехника. 1999. № 5. С. 24–31.

Получено 28.11.2023

Лихтциндер Борис Яковлевич, д.т.н., профессор, профессор кафедры сетей и систем связи Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Л. Толстого, 23. Тел. +7 846 333-47-69. Email: lixt@psuti.ru

QUEUE DISPERSION IN QUEUE SYSTEMS WITH GROUP POISSON FLOWS

Lichtzinder B. Ya.

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russian Federation

E-mail: lixt@psuti.ru

The application of interval methods for queue analysis in queuing systems with group Poisson flows is considered. It is shown that, for a given load, the average value of queue sizes in systems with such flows is determined by the dispersion of the numbers of requests arriving during the processing time intervals of one request, and the specified dispersion depends linearly on the load factor. Relations are obtained that determine the dispersion of queue sizes in queuing systems with group Poisson flows. It is shown that this dispersion depends on the third central moment of the numbers of applications arriving during the time intervals of processing one application. The dispersions of the queues of two different group flows, which have the same dependencies of the average values of the queues, differ in the values of the indicated central moments.

Keywords: *group Poisson flows, queuing systems, variances, load factor, queues*

DOI: 10.18469/ikt.2023.21.3.01

Likhttsinder Boris Yakovlevich, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstoy Street, Samara, 443010, Russian Federation; Professor of Networks and Communication Systems Department, Doctor of Technical Science. Tel. +7 846 333-47-69. E-mail: lixt@psuti.ru

References

1. Vishnevskij V.M., Dudin A.N. Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks. *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, no. 8, pp. 3–59. (In Russ.)
2. Neuts M.F. A Versatile Markovian point process. *Journal of Applied Probability*, 1979, vol. 16, no. 4, pp. 764–779. DOI: <https://doi.org/10.2307/3213143>
3. Dudin A.N., Klimenok V.I. *Queueing Systems with Correlated Flows*. Minsk: BGU, 2000, 175 p. (In Russ.)
4. Likhttsinder B. Ya. *Traffic of Multiservice Access Networks (Interval Analysis and Design)*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2018, 290 p. (In Russ.)
5. Likhttsinder B. Ya., Moiseev V.I. Batch poisson and hyperpoisson arrival process teletraffic models. *I-Methods*, 2022, vol. 14, no. 3, pp. 2–11. (In Russ.)
6. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis. *Advances in Applied Probability*, 1980, vol. 12, no. 1, pp. 222–261. DOI: 10.2307/1426503
7. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. *Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications*. Springer Science and Business Media, 2013, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-5317-8
8. Lema M.A. et al. Flexible dual-connectivity spectrum aggregation for decoupled uplink and downlink access in 5G heterogeneous systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2016, vol. 34, no. 1, pp. 2851–2865. DOI: <https://doi.org/10.1109/JSAC.2016.2615185>
9. Niknam S. et al. A multiband OFDMA heterogeneous network for millimeter wave 5G wireless

- applications. *IEEE Access*, 2016, vol. 4, pp. 5640–5648. DOI: 10.1109/ACCESS.2016.2604364
10. Vishnevsky V., Larionov A., Frolov S. Design and scheduling in 5G stationary and mobile communication systems based on wireless millimeter-wave mesh networks. *Distributed Computer and Communication Networks*, 2014, vol. 279, pp. 11–27. DOI: 10.1007/978-3-319-05209-0_2
11. Vishnevsky V.M. et al. Applying graph-theoretic approach for time-frequency resource allocation in 5G mm wave backhaul network. *Advances in Wireless and Optical Communications (RTUWO)*, 2016, pp. 221–224. DOI: 10.1109/RTUWO.2016.7821888
12. Leland W.E. et al. On the self-similar nature of Ethernet traffic. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1994, vol. 2, no. 1, pp. 1–15.
13. Tsybakov B.S. Model of telegraphy based on a self-similar random process. *Radiotekhnika*, 1999, no. 5, pp. 24–31. (In Russ.)

Received 28.11.2023

УДК 621.391: 621 39

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ГРУППОВОГО ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА В ИМИТАЦИОННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СОВРЕМЕННОГО ВИДЕОТРАФИКА

Лихтциндер Б.Я.¹, Привалов А.Ю.²

¹ Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, РФ

² Самарский национальный исследовательский университет имени С.П. Королева, Самара, РФ
E-mail: b.lihtcinder@psuti.ru, privalov1967@gmail.com

Рассматривается возможность использования группового пуассоновского потока для имитационного моделирования современного видеотрафика в отношении аппроксимации статистических характеристик первого и второго порядка создаваемой трафиком очереди в буфере передачи. Предложен способ определения параметров аппроксимирующего группового пуассоновского потока, заключающийся в одновременной минимизации отклонения зависимостей математического ожидания очереди и дисперсии очереди от нагрузки канала, вычисленной по формулам для аппроксимирующего потока от аналогичных зависимостей реального трафика. В качестве аналитических формул для математического ожидания и дисперсии очереди используются формулы, полученные с помощью интервального метода для системы массового обслуживания с одним прибором и постоянным временем обслуживания. Качество аппроксимации проверяется имитационным моделированием прохождения группового пуассоновского потока с вычисленными параметрами через данную систему массового обслуживания.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповой пуассоновский поток, очереди с постоянным временем обслуживания, имитационное моделирование

Введение

В настоящее время математическими моделями, наиболее адекватно описывающими трафик современных сетей телекоммуникаций, считаются модели самоподобного трафика [1–6; 9; 10]. Действительно, с помощью таких моделей можно одновременно приблизить сразу несколько важных статистических характеристик трафика как первого, так и более высоких порядков [3]. Однако главным недостатком этих моделей является весьма высокая сложность, затрудняющая использование их на практике.

В связи с этим представляется актуальным подход, который бы использовал для аппроксимации характеристик реального трафика более простые и легкие для анализа модели, близкие к моделям, считающимся классическими. Пусть даже такие модели смогут одновременно аппроксимировать не слишком широкий набор статисти-

ческих характеристик реального трафика, а только наиболее важные из них, но за счет простоты модели это может быть полезно на практике, в частности в имитационном моделировании.

В данной работе применяется именно такой подход, при этом аппроксимируются зависимости первого и второго момента очереди, создаваемой трафиком, от загрузки канала. Такие характеристики выбраны для аппроксимации потому, что именно они важны во многих задачах имитационного моделирования, например в задачах определения размеров буферов для хранения транзитных пакетов в узлах сети или задачах прохождения выделенного потока через загруженную сеть, где необходимо моделировать очереди, создаваемые остальными потоками (как фон для движения выделенного потока).

В качестве простой модели для очереди, образуемой реальным трафиком, используется